Prof. Dr.-Ing. habil. Dr.-Ing. E.h. R. Schönfeld zum 65. Geburtstag

Z-Transformation auf Basis des Residuensatzes

G.-H. Geitner; Dresden

Übersicht Die Z-Transformation ist ein wichtiges Werkzeug für diskontinuierliche Regelungen. Ein wenig beachteter Transformationsweg führt über die Berechnung von Residuen. Alle wichtigen Besonderheiten wie Mehrfachpole, Sprungfähigkeit, komplexe Pole oder Zeitverschiebung unterhalb der Abtastzeit (modifizierte Z-Transformation) können einbezogen werden. Die Vorgabe von Reihenabbruchkriterien oder das Auffinden von Summenformeln ist nicht notwendig. Der Weg ist prinzipiell für manuelle und maschinelle Berechnungen einsetzbar. Die Vorgehensweise wird durch drei ausführliche Beispiele verdeutlicht.

Z-Transformation based on residue theorem

Contents The Z-transformation is an important tool for the control of discontinuous systems. A seldom considered transformation way uses the residue computation. All relevant features as for instance multiple poles, process with feedthrough, complex poles or delay less than the sampling time (so called modified Z-transformation) may be included. There is no truncation criterion or search for a sum formula necessary. This way is always applicable for manual as well as for computer-aided computations. Three detailed examples demonstrate the use of the formulas.

Priv.-Doz. Dr.-Ing. habil. Gert-Helge Geitner, Mitarbeiter am Lehrstuhl Automatisierte Elektroantriebe des Elektrotechnischen Instituts der Technischen Universität Dresden

1. Motivation

Im Zusammenhang mit dem Einsatz diskontinuierlicher Regelungen, d.h. der Verwirklichung vorgegebener Regelgesetze durch Abarbeitung von Differenzengleichungen mittels Rechnerschaltkreisen, stellt die Z-Transformation ein wichtiges Arbeitsmittel dar. Sie kann sowohl bei der Analyse von Regelstrecken und Regelkreisen, als auch zur Synthese des Regelalgorithmus eingesetzt werden.
Erfolgt der Entwurf des Reglers mit der Begründung sehr hoher Abtastfrequenzen ausschließlich mit für kontinuierliche Regelungen entwickelten Werkzeugen, also quasikontinuierlich, so können die Möglichkeiten und Vorteile der Digitaltechnik nicht voll ausgenutzt werden. Schon frühzeitig wurden die Möglichkeiten der Digitaltechnik erkannt [1], Untersuchungen zur diskontinuierlichen Beschreibung von geeigneten Regelkreisgliedern vorgeschlagen [2] und Abtastfrequenzgänge eingeführt [3]. Einfachstes Beispiel für einen vollständig auf der diskontinuierlichen Arbeitsweise basierenden Regler ist der Entwurf auf Endliche Einstellzeit (EEZ) mit dem Sonderfall der Dead-Beat Einstellung [4-7].
In diesem Sinne ist es sinnvoll und wünschenswert aus der Analogtechnik bekannte Verfahren für die diskontinuierliche Arbeitsweise neu zu formulieren [8] bzw. neue nur für die Digitaltechnik einsetzbare Werkzeuge zu entwickeln. Dabei kann die Z-Transformation ein wichtiges Hilfsmittel sein.
Der bekannteste Weg zum Einsatz der Z-Transformation ist die Verwendung von Transformationstabellen [9-11] - gegebenenfalls in Verbindung mit einer Partialbruchzerlegung. Die explizite Ausführung der Z-Transformation kann bei Anwendung der formalen Transformationsvorschrift durch Auffinden geschlossener Formen (Summenformeln) erfolgen [12], oder ausgehend von der Zustandsdarstellung mittels Berechnung der Matrix-Exponentialfunktion und Vorgabe eines geeigneten Reihenabbruchkriteriums realisiert werden [13].
Ein weiterer und wenig beachteter Transformationsweg auf Basis des Residuensatzes wird im Folgenden skizziert und durch drei ausführliche Beispiele veranschaulicht.

2. Ergebnisse der Theorie der Abtastregelungen

Wird ein, aus einem kontinuierlichen Ein-/Ausgangssystem mit der Übertragungsfunktion G(p) durch Abtastung mit einem konstanten Abtastintervall T resultierendes, Abtastsystem in Zustandsdarstellung mittels

$$\underline{x}[n+1] = \underline{A}\,\underline{x}[n] + \underline{b}\,u[n] \tag{1}$$

$$y[n] = \underline{c}\,\underline{x}[n] + d\,u[n] \tag{2}$$

und als Z-Übertragungsfunktion durch

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{N-1} z^{N-1}}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{N-1} z^{N-1} + z^N} + d \tag{3}$$

beschrieben, so stellt die Theorie der Abtastsysteme folgende Ergebnisse zur Verfügung.

2.1 Diagonalform der Zustandsdarstellung und Z-Übertragungsfunktion ($\underline{A} \to \underline{A}_D$, $\underline{b} \to \underline{b}_D$, $\underline{c} \to \underline{c}_D$, $d \to d$)

Es existieren folgende Zusammenhänge.

2.1.1 Alle Pole z_x einfach

$$G(z) = \underline{c}_D(z\underline{I} - \underline{A}_D)^{-1}\underline{b}_D + d = \frac{c_{D1}b_{D1}}{z - z_1} + \frac{c_{D2}b_{D2}}{z - z_2} + \ldots + \frac{c_{DN}b_{DN}}{z - z_N} + d \tag{4}$$

Werden die b_{Dx} auf "1" normiert, so entsprechen die c_{Dx} den Residuen der Übertragungsfunktion.

$$\underline{c}_D = [c_{D1}\ c_{D2}\ \ldots\ c_{DN}]; \quad \underline{b}_D = [1\,1 \ldots 1]^T \quad \text{mit Ordnung N} \tag{5}$$

Die Dynamikmatrix $\underline{A}$ in Diagonalform kann sofort zu

$$\underline{A}_D = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & z_N \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \quad z_x = e^{p_x T} \tag{6}$$

aufgestellt werden.
Berücksichtigt man außerdem, daß die Meßgleichung (2) unbeeinflußt von einer Transformation in den Z-Bereich bleibt, so können die Residuen im Laplacebereich berechnet werden.

$$c_{Dx} = \operatorname*{Res}_{p=p_x} G(p)\, e^{pT} = \lim_{p \to p_x} G(p)\,(p - p_x)\, e^{pT} \tag{7}$$

2.1.2 Mehrfachpole

Die rechte Seite von (4) muß um weitere Partialbrüche bis zur jeweiligen Polordnung n_x erweitert werden.

$$G(z) = \frac{c_{D11}}{z - z_1} + \frac{c_{D12}}{(z - z_1)^2} + \ldots + \frac{c_{D1n_1}}{(z - z_1)^{n_1}} + \frac{c_{D21}}{z - z_2} + \ldots + \frac{c_{DNn_N}}{(z - z_N)^{n_N}} + d \tag{8}$$
$$\text{mit: } n_1 + n_2 + \cdots + n_N = L$$

Zusätzliche Elemente des Meßvektors $\underline{c}_D$ für n_x>1 sind nicht mehr mit Residuen identisch.

$$c_{Dxy} = \sum_{v=0}^{y-1} \binom{y-1}{v} \mathrm{Res}_{(x,v+1)} (-z_x)^{(y-1-v)} \qquad \text{mit} \quad 1 \le y \le n_x \;;\; 1 \le x \le N \tag{9}$$

Zur Berechnung der Residuen muß die (n_x-1)te Ableitung gebildet werden.

$$\mathrm{Res}_{(x,y)} = \frac{1}{(n_x - 1)!} \lim_{p \to p_x} \frac{d^{n_x - 1}}{dp^{n_x - 1}} \left[G(p)\,(p - p_x)^{n_x}\, e^{ypT} \right] \qquad \text{mit} \quad 1 \le y \le n_x \;;\; 1 \le x \le N \tag{10}$$

Mit der Notation der Dynamikmatrix $\underline{A}_D$ in Jordan-Form erfolgt eine Verallgemeinerung der Diagonalform.

$$\underline{A}_D = \begin{bmatrix} \underline{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \underline{J}_2 & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & \underline{J}_N \end{bmatrix} \;;\; \underline{J}_x = \begin{bmatrix} z_x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 \\ 0 & \dots & & z_x \end{bmatrix} \;;\; \underline{b}_{Jx} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Die Dimension der Jordan-Blöcke $\underline{J}_x$ und ihrer zugehörigen Eingangsvektoren $\underline{b}_J$ entspricht der Vielfachheit der Pole.

2.2 Regelungsnormalform der Zustandsdarstellung und Z-Übertragungsfunktion
($\underline{A} \to \underline{A}_R$, $\underline{b} \to \underline{b}_R$, $\underline{c} \to \underline{c}_R$, $d \to d$)

Zwischen Z-Übertragungsfunktion und Regelungsnormalform besteht folgender Zusammenhang.

$$G(z) = \underline{c}_R (z\underline{I} - \underline{A}_R)^{-1} \underline{b}_R + d = \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{N-1} z^{N-1}}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{N-1} z^{N-1} + z^N} + d \tag{12}$$

wobei gilt

$$\underline{c}_R = \underline{c}\,\underline{S} = \underline{c}\begin{bmatrix} \underline{s}_1 & \underline{s}_2 & \ldots & \underline{s}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \ldots & b_{N-1} \end{bmatrix} \tag{13}$$

und

$$\underline{A}_R = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{N-1} \end{bmatrix}; \quad \underline{b}_R = \underline{S}^{-1}\underline{b} = [0\,0 \ldots 1]^T \tag{14}$$

Eine einfache rekursive Berechnung der Spalten $\underline{s}_x$ der Transformationsmatrix $\underline{S}$ bietet der Leverrier-Algorithmus, der in seiner letzten Zeile eine Kontrollgleichung einschließt.

$$\begin{array}{lll} & \underline{B}_{N-1} = \underline{I} & \underline{s}_N = \underline{B}_{N-1}\underline{b} \\ a_{N-1} = -\mathrm{Spur}\,\underline{A}\,\underline{B}_{N-1}\ , & \underline{B}_{N-2} = \underline{A}\,\underline{B}_{N-1} + a_{N-1}\underline{I} & \underline{s}_{N-1} = \underline{B}_{N-2}\underline{b} \\ a_{N-2} = -1/2\,\mathrm{Spur}\,\underline{A}\,\underline{B}_{N-2}\ , & \underline{B}_{N-3} = \underline{A}\,\underline{B}_{N-2} + a_{N-2}\underline{I} & \underline{s}_{N-2} = \underline{B}_{N-3}\underline{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 = -1/(N-1)\ \mathrm{Spur}\,\underline{A}\,\underline{B}_1\ , & \underline{B}_0 = \underline{A}\,\underline{B}_1 + a_1\underline{I} & \underline{s}_1 = \underline{B}_0\underline{b} \\ a_0 = -1/N\,\mathrm{Spur}\,\underline{A}\,\underline{B}_0\ , & \underline{0} = \underline{A}\,\underline{B}_0 + a_0\underline{I} & \text{(Kontrolle)} \end{array} \tag{15}$$

3. Algorithmierbarer Weg zur Berechnung der Zähler- und Nennerkoeffizienten einer Z-Übertragungsfunktion

Ausgehend von einer Zustandsdarstellung in Diagonalform stehen die gesuchten Koeffizienten a_x und b_x der Z-Übertragungsfunktion (3) nach Berechnung von (13) und (15) zur Verfügung.
Liegt die Übertragungsfunktion G(p) in der Form

$$G(p) = \frac{T \cdot (g_0 + g_1 p + \ldots + g_M p^M)}{(1+pT_1)(1+pT_2)\ldots(1+pT_N)} \tag{16}$$

vor, dann ist das betrachtete Ein-/Ausgangssystem für N-M=1 sprungfähig und der Durchgriff berechnet sich zu

$$d = \prod_{x=1}^{N} q_x^* \cdot g_M^* \qquad \text{mit} \quad q_x^{*'} = \frac{T}{T_x} \qquad \text{und} \quad g_M^* = \frac{g_M}{T^M} \tag{17}$$

Im Fall N-M$\geq$2 ist das System nicht sprungfähig und es gilt d=0. Tritt in (16) im Nenner zusätzlich ein Ausdruck p^x auf, so ist bei M=N und x=1 weiterhin (17) gültig. Bei x>1 wird d=0. Je nach Herkunft der p^x muß jedoch stets der Einfluß von Integrationszeitkonstanten auf die Gesamtstreckenverstärkung im Z-Bereich beachtet werden [14].

Die unter 2.1/2.2 zusammengestellten Beziehungen erlauben die Aufstellung des folgenden Algorithmus.

Schritt 1
Für die kontinuierliche Übertragungsfunktion G(p) werden die Pole p_x einschließlich ihrer Vielfachheit bestimmt. Das ist unmittelbar möglich, wenn G(p) als Linearkombination von Grundgliedern vorliegt. Mit Kenntnis der Pole p_x werden anschließend die Residuen von G(p) berechnet. Jedem Pol von G(p) bei $p=p_x$ entspricht dabei ein Pol der ungekürzten Z-Übertragungsfunktion G(z) bei $e^{p_x T}$ mit der gleichen Vielfachheit.

Schritt 2
Einerseits besteht zwischen der Darstellung in Diagonalform und der Partialbruchzerlegung einer Übertragungsfunktion ein einfacher Zusammenhang und andererseits bleibt die Meßgleichung der Zustandsdarstellung bei einem Übergang vom kontinuierlichen System zum Abtastsystem unbeeinflußt. Folglich kann mit Hilfe der Ergebnisse aus Schritt 1 sofort im Z-Bereich die Dynamikmatrix $\underline{A}_D$ und der Meßvektor $\underline{c}_D$ in Diagonalform angegeben werden. Bei Mehrfachpolen ist die Anwendung der Jordan-Form vorteilhaft.
Die Anordnung der Elemente in $\underline{A}_D$ und $\underline{c}_D$ erfolgt nach *fallendem* Betrag der Pole z_x im Z-Bereich (vgl. (5),(6),(11)) und bei Mehrfachpolen zusätzlich nach *fallender* Potenz des Nenners der Partialbruchzerlegung (vgl. (8)).

Schritt 3
Anwendung des Leverrier-Algorithmus zur Berechnung der Spaltenvektoren einer Transformationsmatrix von Diagonal- oder Jordan-Form in Regelungsnormalform sowie der Nennerkoeffizienten a_x der gesuchten Z-Transformierten. Die zugehörigen Zählerkoeffizienten b_x ergeben sich durch Transformation der Meßgleichung in Regelungsnormalform. Der Durchgriff bleibt unbeeinflußt unter einer Basistransformation.

4. Beispiel

Zur Veranschaulichung des Rechenweges wird die Transformation eines Verzögerungsgliedes gewählt. Je nach Kopplung zwischen Regler und Strecke bzw. Ansteuersignal der Strecke und Ausführung der Messung der Regelgröße bzw. Bereitstellung des diskreten Streckenausgangssignales können verschiedene Varianten auftreten.

4.1 Beispielvariante I

Z-Transformation von

$$G_a(p) = (1 - e^{-pT}) \cdot \frac{V_1}{p(1 + pT_1)} = G_{a1}(p) \cdot G_{a2}(p) \tag{18}$$

Dieser Fall liegt vor, wenn die Strecke durch eine Treppenfunktion (Haltegliedausgang) angesteuert und der Augenblickswert der Regelgröße gemessen wird. Oder wenn die Strecke durch technische Impulse angesteuert (Stellgliedmodell auf Abtasterbasis) und der Mittelwert der Regelgröße gemessen wird.
Der vorgeschlagene Algorithmus ist auf $G_{a2}(p)$ anzuwenden. Für $G_{a1}(p)$ ist die formale Definition der Z-Transformation $e^{pT}=z$ einsetzbar.

4.1.1 Anwendung Schritt 1

a, Bestimmung der Pole: $p_1 = 0$ mit Vielfachheit $n_1=1$

$$p_2 = -\frac{1}{T_1}$$ mit Vielfachheit n_2=1

und L=n_1+n_2=2; M=0

b, Residuenberechnung:

$$c_{D1} = \lim_{p\to 0} \frac{V_1 \cdot \frac{1}{T_1}}{p(\frac{1}{T_1}+p)} \cdot (p-0)\cdot e^{pT} = V_1$$

$$c_{D2} = \lim_{p\to -\frac{1}{T_1}} \frac{V_1 \cdot \frac{1}{T_1}}{p(\frac{1}{T_1}+p)} \cdot (p+\frac{1}{T_1})\cdot e^{pT} = -V_1 e^{-\frac{T}{T_1}} = -V_1 e^{-q}$$

4.1.2 Anwendung Schritt 2

$$\underline{A}_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-q} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{c}_D = \begin{bmatrix} V_1 & -V_1 e^{-q} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{b}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.1.3 Anwendung Schritt 3

a, Berechnung der Nennerkoeffizienten nach (15)

$$\underline{B}_1 = \underline{I} \quad ; \qquad \underline{s}_2 = \underline{I}\cdot \underline{b}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\mathrm{Spur}(\underline{A}_D \cdot \underline{I}) = -\mathrm{Spur}(\underline{A}_D) = -(1+e^{-q})$$

$$\underline{B}_0 = \underline{A}_D \cdot \underline{B}_1 + a_1 \cdot \underline{I} = \begin{bmatrix} -e^{-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad \underline{s}_1 = \underline{B}_0 \cdot \underline{b}_D = \begin{bmatrix} -e^{-q} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\underline{A}_D \underline{B}_0) = -\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\begin{bmatrix} -e^{-q} & 0 \\ 0 & -e^{-q} \end{bmatrix} = e^{-q}$$

$\underline{A}_D \underline{B}_0 + a_0 \underline{I} = \underline{0}$ (Kontrolle)

b, Berechnung der Zählerkoeffizienten nach (13)

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} = \underline{c}_R = \underline{c}_D \cdot \underline{S} = \begin{bmatrix} V_1 & -V_1 e^{-q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-q} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & V_1(1-e^{-q}) \end{bmatrix}$$

c, Aufstellung der Z-Übertragungsfunktion mit fallenden Potenzen

Wegen L-M=2 folgt d=0 und damit

$$G_{a2}(z) = \frac{V_1(1-e^{-q})z}{e^{-q}-(1+e^{-q})z+z^2} \quad \Rightarrow \quad G_{a2}(z^{-1}) = \frac{V_1(1-e^{-q})z^{-1}}{(1-e^{-q}z^{-1})(1-z^{-1})}$$

sowie $G_a(z^{-1}) = G_{a1}(z^{-1})G_{a2}(z^{-1}) = \dfrac{V_1(1-e^{-q})z^{-1}}{(1-e^{-q}z^{-1})}$

4.2 Beispielvariante II

Z-Transformation von

$$G_b(p) = \frac{T \cdot V_1}{(1 + pT_1)} \tag{19}$$

Dieser Fall liegt vor, wenn die Strecke durch einen technischen Impuls (endliche Breite T) angesteuert und der Augenblickswert der Regelgröße gemessen wird.
Der vorgeschlagene Algorithmus ist auf $G_b(p)$ anzuwenden.

4.2.1 Anwendung Schritt 1

a, Bestimmung der Pole: $p_1 = -\frac{1}{T_1}$ mit Vielfachheit $n_1=1$

und $L=n_1=1$; $M=0$

b, Residuenberechnung:

$$c_{D1} = \lim_{p \to -\frac{1}{T_1}} \frac{V_1 \cdot T \cdot \frac{1}{T_1}}{(\frac{1}{T_1} + p)} \cdot (p + \frac{1}{T_1}) \cdot e^{pT} = qV_1 e^{-q}$$

4.2.2 Anwendung Schritt 2

$$\underline{A}_D = e^{-q} \quad ; \quad \underline{c}_D = qV_1 e^{-q} \quad ; \quad \underline{b}_D = 1$$

4.2.3 Anwendung Schritt 3

a, Berechnung der Nennerkoeffizienten nach (15)

$$\underline{s}_1 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\underline{B}_0 = 1 \quad ;$$

$$a_0 = -\mathrm{Spur}\left(\underline{A}_D \cdot \underline{I}\right) = -\mathrm{Spur}\left(e^{-q} \cdot 1\right) = -e^{-q}$$

$$\underline{A}_D \underline{B}_0 + a_0 \underline{I} = \underline{0} \quad \text{(Kontrolle)}$$

b, Berechnung der Zählerkoeffizienten nach (13)

$$\left[b_0\right] = \underline{c}_R = \underline{c}_D \cdot \underline{S} = qV_1 e^{-q} \cdot 1 = qV_1 e^{-q}$$

c, Aufstellung der Z-Übertragungsfunktion mit fallenden Potenzen

Wegen L-M=1 folgt nach (17) $d = \frac{T}{T_1} \cdot V_1$ und damit

$$G_b(z) = \frac{qV_1 e^{-q}}{-e^{-q} + z} + qV_1 = \frac{qV_1 z}{z - e^{-q}}$$

sowie $G_b(z^{-1}) = \frac{qV_1}{(1 - e^{-q} z^{-1})}$

<u>Anmerkung</u>: Für dieses einfache Beispiel können die Berechnungen unter a, und b, im Schritt drei auch entfallen, da die zugehörige Gleichung (4) nur aus einem Term besteht.

4.3 Beispielvariante III

Z-Transformation von

$$G_c(p) = (1 - e^{-pT})^2 \cdot \frac{V_1}{p^2 T(1 + pT_1)} = G_{c1}(p) \cdot G_{c2}(p) \tag{20}$$

Dieser Fall liegt vor, wenn die Strecke durch eine Treppenfunktion (Haltegliedausgang) angesteuert und der Mittelwert der Regelgröße gemessen wird.
Der vorgeschlagene Algorithmus ist auf $G_{c2}(p)$ anzuwenden. Für $G_{c1}(p)$ ist die formale Definition der Z-Transformation $e^{pT}=z$ einsetzbar.

4.3.1 Anwendung Schritt 1

a, Bestimmung der Pole: $p_1 = 0$ mit Vielfachheit $n_1=2$

$p_2 = -\frac{1}{T_1}$ mit Vielfachheit $n_2=1$

und $L=n_1+n_2=3$; $M=0$

b, Residuenberechnung:

$$\mathrm{Res}_{(1,1)} = 1 \cdot \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left[\frac{V_1 q}{T^2 p^2 (\frac{1}{T_1} + p)} (p-0)^2 e^{pT}\right] = \frac{V_1 q}{T^2} \cdot \lim_{p\to 0} \frac{Te^{pT}(\frac{1}{T_1} + p) - 1 \cdot e^{pT}}{(\frac{1}{T_1} + p)^2}$$

$$= \frac{V_1}{q}(q-1)$$

$$\mathrm{Res}_{(1,2)} = 1 \cdot \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp}\left[\frac{V_1 q}{T^2 p^2 (\frac{1}{T_1} + p)} (p-0)^2 e^{2pT}\right] = \frac{V_1 q}{T^2} \cdot \lim_{p\to 0} \frac{2Te^{2pT}(\frac{1}{T_1} + p) - 1 \cdot e^{2pT}}{(\frac{1}{T_1} + p)^2}$$

$$= \frac{V_1}{q}(2q-1)$$

$$c_{D11} = \sum_{v=0}^{0} \binom{0}{v} \mathrm{Res}_{(1,v+1)} (-1)^{(-v)} = \mathrm{Res}_{(1,1)} = \frac{V_1}{q}(q-1)$$

$$c_{D12} = \sum_{v=0}^{1} \binom{1}{v} \mathrm{Res}_{(1,v+1)} (-1)^{(1-v)} = -\mathrm{Res}_{(1,1)} + \mathrm{Res}_{(1,2)} = V_1$$

$$c_{D2} = \lim_{p\to -\frac{1}{T_1}} \frac{V_1 q}{T^2} \frac{1}{p^2(\frac{1}{T_1} + p)} \cdot (p + \frac{1}{T_1}) \cdot e^{pT} = \frac{V_1}{q} e^{-q}$$

4.3.2 Anwendung Schritt 2

$$\underline{A}_D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-q} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{c}_D = \begin{bmatrix} V_1 & \frac{V_1}{q}(q-1) & \frac{V_1}{q} e^{-q} \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{b}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.3.3 Anwendung Schritt 3

a, Berechnung der Nennerkoeffizienten nach (15)

$$\underline{B}_2 = \underline{I} \quad ; \qquad \underline{s}_3 = \underline{I} \cdot \underline{b}_D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_2 = -\mathrm{Spur}(\underline{A}_D \cdot \underline{I}) = -\mathrm{Spur}(\underline{A}_D) = -(2 + e^{-q})$$

$$\underline{B}_1 = \underline{A}_D \cdot \underline{B}_2 + a_2 \cdot \underline{I} = \begin{bmatrix} -(1+e^{-q}) & 1 & 0 \\ 0 & -(1+e^{-q}) & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{s}_2 = \underline{B}_1 \cdot \underline{b}_D = \begin{bmatrix} 1 \\ -(1+e^{-q}) \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\underline{A}_D \underline{B}_1) = -\frac{1}{2}\mathrm{Spur}\begin{bmatrix} -(1+e^{-q}) & -e^{-q} & 0 \\ 0 & -(1+e^{-q}) & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{-q} \end{bmatrix} = 1 + 2e^{-q}$$

$$\underline{B}_0 = \underline{A}_D \cdot \underline{B}_1 + a_1 \cdot \underline{I} = \begin{bmatrix} e^{-q} & -e^{-q} & 0 \\ 0 & e^{-q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{s}_1 = \underline{B}_0 \cdot \underline{b}_D = \begin{bmatrix} -e^{-q} \\ e^{-q} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a_0 = -\frac{1}{3}\mathrm{Spur}(\underline{A}_D \underline{B}_0) = -\frac{1}{3}\mathrm{Spur}\begin{bmatrix} e^{-q} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-q} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-q} \end{bmatrix} = -e^{-q}$$

$$\underline{A}_D \underline{B}_0 + a_0 \underline{I} = \underline{0} \quad \text{(Kontrolle)}$$

b, Berechnung der Zählerkoeffizienten nach (13)

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = \underline{c}_R = \underline{c}_D \cdot \underline{S} = \begin{bmatrix} V_1 & \frac{V_1}{q}(q-1) & \frac{V_1}{q}e^{-q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -e^{-q} & 1 & 0 \\ e^{-q} & -(1+e^{-q}) & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{V_1}{q}\left[1 - e^{-q}(1+q)\right] & \frac{V_1}{q}(q - 1 + e^{-q}) \end{bmatrix}$$

c, Aufstellung der Z-Übertragungsfunktion mit fallenden Potenzen

Wegen L-M=3 folgt d=0 und damit

$$G_{c2}(z) = \frac{\frac{V_1}{q}[1 - e^{-q}(1+q)]z + \frac{V_1}{q}(q - 1 + e^{-q})z^2}{-e^{-q} + (1+2e^{-q})z - (2+e^{-q})z^2 + z^3}$$

$$G_{c2}(z^{-1}) = \frac{\frac{V_1}{q}(q - 1 + e^{-q}) + \frac{V_1}{q}[1 - e^{-q}(1+q)]z^{-1}}{(1 - e^{-q}z^{-1})(1 - z^{-1})^2} z^{-1}$$

sowie $G_c(z^{-1}) = G_{c1}(z^{-1})G_{c2}(z^{-1}) = \dfrac{\frac{V_1}{q}(q - 1 + e^{-q}) + \frac{V_1}{q}[1 - e^{-q}(1+q)]z^{-1}}{(1 - e^{-q}z^{-1})} z^{-1}$

5. Zusammenfassung

Für den vorgestellten Transformationsweg ist weder das Auffinden von Summenformeln noch die Vorgabe von Reihenabbruchkriterien notwendig. Der Einsatz kann sowohl für manuelle, als auch für maschinelle Berechnungen erfolgen. Eine maschinelle Berechnung von Gleichung (10) ist für technisch sinnvolle Strecken möglich. Neben der Sprungfähigkeit der Strecke sowie Mehrfachpolen können auch komplexe Pole und Zeitverschiebungen unterhalb der Abtastzeit (sogenannte modifizierte Z-Transformation) in den Rechenweg einbezogen werden. In [14] sind hierzu vier weitere Beispiele abgehandelt. Zusätzlich zur Ergebniskontrollgleichung in (15) beinhaltet der Rechenweg weitere Überprüfungsbedingungen für maschinelle und manuelle Berechnungen [14].
Die Z-Transformation bietet eine universelle Basis zum Entwurf schneller digitaler Regler z.B. zur Beherrschung von Netzrückwirkungen [15-16] oder zur Regelung elektrischer Antriebe [17]. Moderne Servoantriebe wiederum sind ein wesentlicher Grundbaustein für das innovative Gebiet der dezentralen Steuerung komplexer Bewegungsvorgänge [18-20].

Literatur

[1] *Schönfeld R, Habiger E., Stock W., Zenkel D.*: VEM Handbuch. Die Technik der elektrischen Antriebe - Grundlagen. Verlag Technik, Berlin, 1974
[2] *Schönfeld R., Krug H.*: Näherungsverfahren zur dynamischen Beschreibung des Stromrichterstellgliedes. msr15(1972)7 S.246-251
[3] *Schönfeld R., Krug H.*: Beschreibung digitaler Regelstrukturen mit Hilfe modifizierter Frequenzkennlinien. msr22(1979)4 S.186-191
[4] *Ragazzini J.R., Franklin G.F.*: Sampled-Data Control systems. Mc Graw-Hill, New York, 1958
[5] *Geitner G.-H., Stoev A.*: Optimiert auf endliche Einstellzeit. msr28(1985)2 S.60-65, 4 S.165-169, 5 S.211-214
[6] *Geitner G.-H., Krug H.*: Dynamische Störoptimierung elektrischer DDC-Antriebe. msr31(1988)1 S.11-17
[7] *Schönfeld, R.*: Digitale Regelung elektrischer Antriebe. Verlag Technik, Berlin, 1987
[8] *http://eeiwzb.et.tu-dresden.de/aa/aa_1.htm*: BOD - Das Digitale Betragsoptimum
[9] *Bronstein I.N., Semendjajew K.A.*: Taschenbuch der Mathematik. BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987
[10] *Tou J.T.*: Digital and sampled-data control systems. Mc Graw-Hill, New York, 1959
[11] *Göhring B.*: Wahl der Anfangswerte für On-line -Parameterschätzverfahren. rt 23(1975)11 S.374-378
[12] *Günther M.*: Zeitdiskrete Steuerungssysteme. Verlag Technik, Berlin, 1986
[13] *Ackermann J.*: Abtastregelung. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1988
[14] *Geitner G.-H.*: Entwurf digitaler Regler für elektrische Antriebe. VDE-Verlag, Berlin Offenbach, 1996
[15] *Büchner, P.*: Stromrichter-Netzrückwirkungen und ihre Beherrschung. Verlag für die Grundstoffindustrie Leipzig, 1982
[16] *Büchner, P.*: EMC in Power Electronics - Phenomena, Standardization & Mitigation. ZM Communication, Script, 5th Power Quality, Nürnberg 1997
[17] *Müller, V.*: Handbuch zum Simulationssystem DS88. Dresden, 1998
[18] *n.n.*: Beschreibung ereignisgesteuerter Bewegungsabläufe mit Funktionsplänen. VDI/VDE-Richtlinie 3684, Beuth Verlag, Berlin, 1997
[19] *http://eeiwzb.et.tu-dresden.de/aa/aa_7.htm*: Entwurf, Simulation und Beschreibung ereignisgesteuerter Systeme mittels hybrider Funktionspläne
[20] *Schönfeld, R.*: Bewegungssteuerungen. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1998

Kontakt: TU Dresden, Elektrotechnisches Institut, D-01062 Dresden, Mommsenstr. 13
Gert-Helge.Geitner@tu-dresden.de